1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE:

LIBRETA: TURNO: $\boxed{14 \text{ a } 17}$ $\boxed{19 \text{ a } 22}$ **TEMA 1**

Álgebra Lineal - Primer Cuatrimestre 2013

Recuperatorio del Primer Parcial (24/07/2013)

1. Sean $S = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{Q}^{2\times 2} : -ka_{11} + a_{21} + a_{22} = 0 \text{ y } a_{12} - 2a_{11} - (k^2+k)a_{21} = 0\}$ y $T = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & k^2+k \\ k+1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2k & 2k+3 \end{pmatrix} \right\rangle$. Hallar todos los $k \in \mathbb{Q}$ tal que $\dim(S \cap T) = 1$.

2. Sean $S, T \subset \mathbb{R}_3[X]$ los subespacios dados por
$$S = \{p \in \mathbb{R}_3[X] : p(1) = p(-1) = 0\} \text{ y } T = \langle X^3 + X, X^2 + 1, 2X + 3\rangle.$$
Hallar un proyector $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}_3[X])$ tal que $\underline{\dim(f(S) \cap T) = 2}$ y $\dim \mathrm{Nu}(f) = 1$.

3. Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $f_A \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$ la transformación lineal tal que $f_A(x) = Ax$ para todo $x \in \mathbb{K}^n$. Probar que
$$\mathrm{rg}(A^2) < \mathrm{rg}(A) \iff \mathrm{Im}(f_A) \cap \mathrm{Nu}(f_A) \neq \{0\}.$$

4. Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathbb{R}^{2\times 2})^*$ dados por $\varphi_1(A) = \mathrm{tr}(A)$ y $\varphi_2(A) = \mathrm{tr}(BA)$ para $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Sean $S = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ y $T = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A = A^t \text{ y } a_{22} - 2a_{11} - 3a_{12} + 2a_{21} = 0\}$ subespacios de $(\mathbb{R}^{2\times 2})^*$ y $\mathbb{R}^{2\times 2}$ respectivamente.
   a) Probar que $S \oplus T^\circ = (\mathbb{R}^{2\times 2})^*$.
   b) Sean $\varphi_3, \varphi_4 \in T^\circ$ y $\mathcal{B}$ una base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\mathcal{B}^* = \{\underbrace{\varphi_1 + \varphi_3 - \varphi_4}_{\psi_1}, \underbrace{\varphi_2}_{\psi_2}, \underbrace{\varphi_3 + \varphi_4}_{\psi_3}, \underbrace{2\varphi_1 - \varphi_2}_{\psi_4}\}$ es su base dual. Hallar las coordenadas de $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ en la base $\mathcal{B}$.

5. Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial con producto interno y $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ una base ortonormal de $\mathbb{V}$. Hallar $S^\perp$ y $d(p_1 + p_2, S)$ para $S = \langle 6p_1 + 2p_2 - p_3, p_2 + p_3\rangle$.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS